Kolokwium z równań różniczkowych. Rozwiązania.

Grupa A

Zadanie 1. Rozwiąż równanie Bernoulliego

$$y' = y \operatorname{tg} x + y^4 \cos x$$

z warunkiem początkowym $y(\frac{\pi}{4}) = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$. Czy rozwiązanie pozostaje ograniczone w przedziale $|x| < \frac{\pi}{2}$? Jeśli tak, to oblicz granice $\lim y(x)$ gdy $x \to \pm\frac{\pi}{2}$.

Rozwiązanie. Warunek początkowy wskazuje na to, że $y \not\equiv 0$. Dzieląc równanie przez y^4 i podstawiając $z = y^{-3}$ uzyskujemy

$$z' = -3z \operatorname{tg} x - 3\cos x.$$

Równanie jednorodne ma rozwiązanie $\ln|z(x)| = -3\int \operatorname{tg} x$, czyli $z(x) = C \cdot \cos^3 x$ ($\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x| + C$). Uzmienniając stałą dostajemy $C'(x)\cos^3 x = -3\cos x$, a więc $C(x) = -3\operatorname{tg} x + D$ (przypominamy: $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$). Stąd, ostatecznie

$$z(x) = \cos^2 x(-3\sin x + D\cos x).$$

Jeśli $y(\pi/4) = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$, to $z(\pi/4) = -\frac{2^{9/2}}{27}$. Jako, że $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = 2^{-1/2}$, mamy $(-3 + D)\cdot 2^{-3/2} = -\frac{2^{9/2}}{27}$. Stąd $D - 3 = -\frac{64}{27}$, czyli $D = \frac{17}{27}$. A więc

$$y(x) = \frac{1}{\cos x \sqrt[3]{-3\operatorname{tg} x + D}}.$$

Z ciągłości tangensa wynika, że na zbiorze $[-\pi/2, \pi/2]$ istnieje takie x_0, że $\operatorname{tg} x_0 = -D/3$. A zatem $z(x_0) = 0$, czyli y nie jest ograniczona w $[-\pi/2, \pi/2]$. Ponadto widzimy, że gdy $x \to \pm\pi/2$, $z(x) \to 0$. Więc obie granice na brzegach też będą nieskończone. □

Zadanie 2. Wykaż, że równanie

$$y' = y\cos^2 x + \sin x$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie okresowe i znajdź je.

Rozwiązanie. Z pewnością nie istnieją dwa rozwiązania okresowe. Istotnie, jeśli y_1 i y_2 są rozwiązaniami okresowymi, to ich różnica spełnia równanie jednorodne $y' = y\cos^2 x$, czyli $y_1 - y_2 = Ce^{x/2 + \frac{\sin 2x}{4}}$ (przypominam: $\int \cos^2 x = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}$). Ale $\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} > \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$, więc funkcja $e^{x/2 + \frac{\sin 2x}{4}}$ jest nieograniczona.

Aby znaleźć rozwiązanie okresowe uzmienniamy stałą i otrzymujemy

$$C'(x) = \sin x \cdot e^{-x/2 - \frac{\sin 2x}{4}}.$$

Czyli, ostatecznie (tutaj ważne są granice całkowania!)

$$y(x) = e^{x/2 + \frac{\sin 2x}{4}}\left(D + \int_0^x e^{-y/2 - \frac{\sin 2y}{4}} \sin y dy\right).$$

Pozostaje tylko pokazać, że istnieje takie D, że y jest okresowa. Zauważmy, że $y(0) = D$. Zauważmy, że w świetle okresowości funkcji $\cos x$ i $\sin x$, wystarczy pokazać, że istnieje takie D, że $y(2\pi) = y(0)$. W rzeczy samej, jeśli $y(x)$ spełnia równanie wyjściowe z warunkiem początkowym $y(0) = y_0$ oraz $y(2\pi) = 0$, to funkcja $y_2(x) = y(x - 2\pi)$ spełnia to samo równanie z tym samym warunkiem początkowym. Na mocy jednoznaczności $y_2(x) = y(x)$, czyli $y(x - 2\pi) = y(x)$. Stąd y jest okresowa.

Ale mamy

$$y(2\pi) = e^{\pi}\left(\int_0^{2\pi} e^{-y/2 - \frac{\sin 2y}{4}} \sin y dy + D\right).$$

Kładąc

$$D = \frac{e^{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-y/2 - \frac{\sin 2y}{4}} \sin y dy}{1 - e^{\pi}}$$

otrzymujemy szukane rozwiązanie. $\square$

Zadanie 3. Znajdź całkę pierwszą równania

$$\frac{3x^2+y^2}{y^2}dx - \frac{2x^3+5y}{y^3}dy = 0.$$

Rozwiązanie. Zauważmy, że $\frac{\partial}{\partial y}\frac{3x^2+y^2}{y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{-2x^3-5y}{y^3} = -\frac{6x^2}{y^3}$. Równanie jest więc zupełne. Całkując pierwszą część po x uzyskujemy $H(x,y) = \frac{x^3}{y^2} + x + C(y)$. Wtedy $\frac{\partial}{\partial y}H(x,y) = -\frac{2x^3}{y^3} + C'(y) \overset{!}{=} -\frac{2x^3}{y^3} - 5/y^2$. Stąd $C(y) = 5/y + D$. A zatem

$$H(x,y) = \frac{x^3}{y^2} + x + \frac{5}{y} + D.$$

$\square$

Zadanie 4. Znajdź rodzinę krzywych, które są prostopadłe do rodziny $y^2 = Ce^x + x + 1$, $C \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie. W punkcie (x_0, y_0) nachylenie krzywej z rodziny jest równe $y' = \frac{Ce^x+1}{\sqrt{Ce^x+x+1}} = \frac{y-x}{\sqrt{y}}$.

Krzywa prostopadła będzie miała nachylenie równe $-1/y'$, czyli $\frac{\sqrt{y}}{x-y}$. Otrzymujemy więc równanie

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y}}{x-y}.$$

To równanie o wiele łatwiej rozwiązać przyjmując x za niewiadomą, a y za zmienną. Mamy wtedy

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{y}}x - \sqrt{y}.$$

Jest to rówanie liniowe niejednorodne. Rozwiązanie równania jednorodnego ma postać $x(y) = C \cdot e^{2\sqrt{y}}$. Uzmienniając stałą dochodzimy do warunku

$$C'(y) = -\sqrt{y}e^{-2\sqrt{y}}.$$

A więc

$$C(y) = -\int \sqrt{y}e^{-2\sqrt{y}}dy = \left\{ \begin{array}{c} u = \sqrt{y} \\ du\dfrac{1}{\sqrt{y}}dy \end{array} \right\} = -\int u^4 e^{-u} du =$$
$$= e^{-u}\left(u^4 + 4u^3 + 12u^2 + 24u + 24\right) + D.$$

W ostateczności

$$x(y) = e^{2\sqrt{y}}D + e^{\sqrt{y}}\left(y^2 + 4y^{3/2} + 12y + 24y^{1/2} + 24\right).$$

$\square$

Grupa B

Zadanie 1. Rozwiąż równanie Bernoulliego

$$y' = \frac{3}{2}\left(\frac{y}{x} + \sqrt[3]{y}\,x\cos x\right).$$

I przedyskutuj jednoznaczność rozwiązania w zależności od warunku początkowego $y(0) = y_0$.

Rozwiązanie. Równanie jest dość nietypowe, bo wykładnik przy y jest niecałkowity.

Po pierwsze mamy rozwiązanie $y \equiv 0$.

Dzielimy obie strony przez $\frac{3}{2}\sqrt[3]{y}$ i podstawiamy $z = y^{2/3}$. Otrzymujemy

$$z(x) = \frac{z}{x} + x\cos x.$$

Uzmienniając stałą dostajemy $z(x) = C \cdot x$, a następnie $C'(x) = \cos x$. Stąd

$$z(x) = x(\sin x + D).$$

A więc

$$y(x) = x^{3/2}\left(\sin x + D\right)^{3/2}.$$

W tej chwili możemy przystąpić do dyskusji jednoznaczności. Kiedy $y \neq 0$ i $x \neq 0$, prawa strona jest gładka, więc mamy lokalną jednoznaczność z twierdzenia Cauchy'ego–Picarda. Problem może pojawić się przy dojściu z y do zera lub przy $x \to 0$.

Zauważmy, że niezależnie od wyboru D mamy $\lim_{x\to 0} y(x) = 0$ oraz $\lim_{x\to 0} y'(x) = 0$. W związku z tym rozwiązanie dochodzi do rozwiązania zerowego i przeczy to jednoznaczności.

Z drugiej strony, jeśli $D \in [-1, 1]$, to gdy $x_0 = \arcsin D$, mamy $y(x_0) = 0$. W tym przypadku znowu dochodzimy do zera w skończnym czasie i możemy sobie sklejać rozwiązania. Zauważmy przy tym, że wykładnik $3/2$ w potędze gwarantuje, że jeśli $y(x) = 0$, to $y'(x) = 0$: rozwiązania sklejają się gładko.

Pozostaje tylko wyliczyć, dla jakich y_0 mamy $D \in [-1, 1]$, ale to już pominę. $\square$

Zadanie 2. Niech $f(x)$ będzie ciągła i ograniczona na $\mathbb{R}$. Udowodnij, że równanie

$$y' + y = f(x)$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie ograniczone. Wykazać, że jeśli f jest okresowa, to rozwiązanie to też jest funkcją okresową.

Rozwiązanie. Jedyność rozwiązania ograniczonego pokazujemy identycznie, jak w przypadku zadania drugiego w grupie A.

Istnienie wynika z następującej argumentacji. Równanie jednorodne ma rozwiązanie $y(x) = e^{-x}$, więc rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego (RSRN) ma postać

$$y(x) = e^{-x}\left(\int_0^x e^s f(s)ds + D\right).$$

Zauważmy, że jeśli $|f| < M$, to $|y(x)| < |D|e^{-x}$. Czyli przy $x \to \infty$ *każde* rozwiązanie pozostaje ograniczone. Pozostaje tylko znaleźć takie D, żeby rozwiązanie było ograniczone przy $x \to -\infty$. Ponieważ $e^{-x} \to \infty$, gdy $x \to -\infty$, D musi spełniać warunek taki, żeby

$$\lim_{x\to -\infty} \int_0^x e^s f(s)ds = -D.$$

A więc $D = \int_{-\infty}^0 e^s f(s)ds$ jest jedynym kandydatem. Wtedy mamy

$$y(x) = e^{-x}\int_{-\infty}^x f(s)e^s ds.$$

Zauważmy, że całka w powyższym wzorze szacuje się przez Me^x, gdy $|f| < M$. Stąd $|y| < M$, więc rozwiązanie istotnie jest ograniczone.

Przypuśćmy teraz, że f jest okresowa. Badanie bezpośrednie, że y jest okresowa przekracza cierpliwość 95% populacji. Dlatego zastosujemy inną metodę: weźmy y rozwiązanie ograniczone i $w(x) = y(x+T)$ (T jest okresem). Wtedy $w' = w + f(x)$ a więc w spełnia to samo równanie i też jest ograniczone. A więc $w = y$. $\square$

Zadanie 3. Znajdź całkę pierwszą rówania

$$(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y\cos^2 x dy = 0.$$

Rozwiązanie. Zauważmy, że $\frac{\partial}{\partial y}(1 + y^2 \sin 2x) = -\frac{\partial}{\partial x} 2ycos^2 x = 2y \sin 2x$. A więc mamy zupełność układu. Stąd $H(x, y) = x - \frac{1}{2}y^2 \cos 2x + C(y)$. Wtedy $H'_y = -y \cos 2x + C'(y) \stackrel{!}{=} -2y \cos^2 x$. Ale ze wzorów redukcyjnych mamy $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$. Stąd $C'(y) = y$. Ostatecznie

$$H(x, y) = x - \frac{2}{1}y^2 \cos 2x + \frac{1}{2}y^2 + D.$$

□

Zadanie 4. Niech C będzie krzywą zawartą w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych. Załóżmy, że dla każdego punktu $(x_0, y_0) \in C$ pole trapezu utworzonego przez:

— Fragment osi OX;
— Fragment osi OY;
— Fragment stycznej do C w punkcie (x_0, y_0).
— Odcinek pionowy, który łączy (x_0, y_0) z osią OX.

Jest stale równe 1 a krzywa C przechodzi przez $(1, 1)$. Znajdź rówanie tej krzywej.

Rozwiązanie. Styczna do krzywej C w punkcie $C = (x_0, y_0)$ przecina oś OY w punkcie $A = (0, y_0 - y'(x_0)x_0)$. Odcinek osi OY łączący $B = (0, 0)$ z punktem A oraz odcinek pionowy łączący (x_0, y_0) z $D = (x_0, 0)$ stanowią podstawy trapezu. Wysokością trapezu jest odcinek BD. Licząc w sposób oczywisty długości boków $|AB|$, $|CD|$ i $|BD$ oraz korzystając z wzoru $S = \frac{1}{2}(a + b)h$ uzyskujemy

$$\text{Pole trapezu} = \frac{1}{2}(2y_0 + y'(x_0)x_0)x_0 \stackrel{!}{=} 1.$$

Opuśćmy teraz zera w subskryptach dla czytelności. Mamy równanie różniczkowe

$$\frac{1}{2}y'x^2 + xy = 1.$$

Jest to równanie liniowe niejednorodne. Równanie jednorodne ma postać $y' = 2\frac{y}{x}$ i rozwiązanie $y(x) = Cx^2$. Wstawiając do równania mamy $C'(x)x^4 = 1$, czyli $C(x) = D - \frac{1}{3x^3}$. A zatem

$$y(x) = Dx^2 - \frac{1}{3x}.$$

Warunek $y(1) = 1$ daje $D = \frac{4}{3}$. □

Kryteria oceniania

Za każde zadanie można uzyskać maksymalnie 4 punkty.

Grupa A.

- Zadanie 1
  - **1pkt:** Właściwe podstawienie.
  - **1pkt:** Rozwiązanie równania.
  - **1pkt:** Wyliczenie stałej.
  - **1pkt:** Dyskusja ograniczoności.
- Zadanie 2
  - **1pkt:** Rozwiązanie równania.
  - **2pkt:** Istnienie rozwiązania ograniczonego.
  - **1pkt:** Jednoznaczność i okresowość.
- Zadanie 3
  - **1pkt:** Sprawdzenie zupełności.
  - **3pkt:** Wyznaczenie funkcji.
- Zadanie 4
  - **1pkt:** Napisanie równania.
  - **1pkt:** Wyrugowanie stałej C.

2pkt: Rozwiązanie równania

Grupa B.

- Zadanie 1
  1pkt: Właściwe podstawienie.
  2pkt: Rozwiązanie równania.
  1pkt: Dyskusja jednoznaczności (nawet krótka).
- Zadanie 2
  1pkt: Rozwiązanie równania.
  2pkt: Istnienie rozwiązania.
  1pkt: Jednoznaczność.
- Zadanie 3
  1pkt: Sprawdzenie zupełności.
  3pkt: Wyznaczenie funkcji.
- Zadanie 4
  2pkt: Napisanie poprawnego równania.
  2pkt: Rozwiązanie równania

Wyniki

Imiona wstawiałem tylko tam, gdzie nie wyznaczało to osoby jednoznacznie. Ocena oznacza ocenę z kolokwium, może ona być podniesiona przez oddawanie zadań. Nie dotyczy to oceny niedostatecznej, którą poprawić może jedynie kolokwium poprawkowe.

Imię	nr indeksu	grupa	Zad 1.	Zad 2.	Zad 3.	Zad 4.	Suma	Ocena
	222124	B	2	—	0	2	4	**ndst**
	222167	B	4	4	2	4	14	**bdb**
Tomasz	222168	B	3	0	3	4	10	**dst+**
Piotr	233875	A	4	0	0	—	4	**ndst**
	233970	A	3	1	4	—	8	**dst**
	234163	A	4	2	—	2	8	**dst**
	234204	B	4	2	4	4	14	**bdb**
	234585	A	1	1	0	0	2	**ndst**
	234586	A	0	—	4	1	5	**ndst**
	234596	B	3	0	3	—	6	**ndst+**
	234701	B	—	1	0	3	4	**ndst**
Tomasz	235854	B	3	3	4	—	10	**dst+**
Piotr	235886	B	4	2	4	2	12	**db**
Tomasz	236049	B	4	3	4	4	15	**bdb**
Tomasz	245893	B	2	3	4	4	13	**db+**